PART2　$f(g(x))g'(x)$ の形の不定積分

要点整理と公式

要点①　$f(g(x))g'(x)$ の形の不定積分

置換積分法の公式

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt \qquad (x=g(t))$$

において，左辺と右辺を入れ替え，積分変数 x を u に，t を x に変えると，次の公式が得られる。

置換積分法②

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du \qquad \text{ただし } g(x)=u$$

(ex) 不定積分 $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$ を求める。

$x^2-1=u$ とおくと　$2x=\dfrac{du}{dx}$ より　$2xdx=du$

$$\int x\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2-1}\cdot 2xdx=\frac{1}{2}\int\sqrt{u}\,du$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{1}{3}(x^2-1)\sqrt{x^2-1}+C$$

要点②　$\dfrac{g'(x)}{g(x)}$ の形の不定積分

置換積分法の公式

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du \quad \cdots\cdots ① \qquad (g(x)=u)$$

において，$f(u)=\dfrac{1}{u}$ とすると

①の左辺は $\displaystyle\int f(u)g'(x)dx=\int\frac{1}{u}\cdot g'(x)dx=\int\frac{g'(x)}{g(x)}dx$

①の右辺は $\int \frac{1}{u}du = \log|u| + C = \log|g(x)| + C$

より，次の公式が成り立つ。

$\frac{g'(x)}{g(x)}$ の不定積分

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \log|g(x)| + C$$

(ex) 不定積分 $\int \frac{2x}{x^2+3}dx$ を求める。

$$\int \frac{2x}{x^2+3}dx = \int \frac{\quad}{x^2+3}dx = \qquad\qquad + C = \log(x^2+3) + C$$

2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^2(x^3+1)^4dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

(4) $\displaystyle\int \tan x dx$

Point Pickup

置換積分法②

$\displaystyle\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du$ ただし $g(x)=u$

とくに $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx=\log|g(x)|+C$

第16講 PART2 確認問題

次の不定積分を求めよ。

ただし，答えは下の選択肢のうちから選べ。

また，C は積分定数とする。

1 $\int x^2(x^3+2)^5\,dx$

$x^3+2=u$ とおくと，$\boxed{ア}\,dx=du$

$$\int x^2(x^3+2)^5\,dx=\int \boxed{イ}\,du$$

$$=\boxed{ウ}+C$$

[ア の選択肢]

① x^2　② $3x^2$　③ $3u^2$

[イ の選択肢]

① u^5　② $3u^5$

③ $\frac{1}{3}u^5$　④ $\frac{1}{3}u^7$

[ウ の選択肢]

① $5(x^3+2)^4$　② $(x^3+2)^6$

③ $\frac{1}{6}(x^3+2)^6$　④ $\frac{1}{18}(x^3+2)^6$

2 $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$x^2+1=u$ とおくと，$\boxed{\text{エ}}dx=du$

$$\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\boxed{\text{オ}}du$$

$$=\boxed{\text{カ}}+C$$

[$\boxed{\text{エ}}$ の選択肢]

① x　　② $2x$　　③ $2u$

[$\boxed{\text{オ}}$ の選択肢]

① $\sqrt{u}$　　② $\dfrac{1}{\sqrt{u}}$

③ $\dfrac{2}{\sqrt{u}}$　　④ $\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$

[$\boxed{\text{カ}}$ の選択肢]

① $\sqrt{x^2+1}$　　② $2\sqrt{x^2+1}$

③ $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2}$　　④ $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

3 $\displaystyle\int\frac{e^x+1}{e^x+x}dx=\boxed{\text{キ}}+C$

① e^x+x　　② $\log(e^x+1)$

③ $\log|e^x+x|$　　④ $\log\left|\dfrac{e^x+1}{e^x+x}\right|$

4 $\displaystyle\int\frac{dx}{\tan x}=\boxed{\text{ク}}+C$

① $\cos^2 x$　　② $\log|\sin x|$

③ $-\log|\sin x|$　　④ $\log|\cos x|$

[MEMO]

PART2 $f(g(x))g'(x)$ の形の不定積分

2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^2(x^3+1)^4\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int \tan x\,dx$

[解答]

(1) $x^3+1=u$ とおくと $3x^2\,dx=du$

$$\int x^2(x^3+1)^4\,dx=\frac{1}{3}\int(x^3+1)^4\cdot 3x^2\,dx=\frac{1}{3}\int u^4\,du=\frac{1}{15}u^5+C=\frac{1}{15}(x^3+1)^5+C$$

(2) $\log x=u$ おくと $\dfrac{1}{x}dx=du$

$$\int\frac{\log x}{x}\,dx=\int\log x\cdot\frac{1}{x}\,dx=\int u\,du=\frac{1}{2}u^2+C=\frac{(\log x)^2}{2}+C$$

(3) $\displaystyle\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx=\int\frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}\,dx=\log|e^x+e^{-x}|+C=\log(e^x+e^{-x})+C$

(4) $\displaystyle\int\tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx=-\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx=-\log|\cos x|+C$

第16講　PART2 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：②，イ：③，ウ：④

[解説]

$x^3+2=u$ とおくと，$\boldsymbol{3x^2\,dx}=du$

$$\int x^2(x^3+2)^5\,dx=\int\frac{1}{3}\cdot(x^3+2)^5\cdot 3x^2\,dx$$

$$=\int\frac{1}{3}u^5\,du \quad \text{[A]}$$

$$=\frac{1}{18}u^6+C$$

$$=\frac{1}{18}(x^3+2)^6+C$$

[A]　置換積分法②

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du$$

ただし，$g(x)=u$

2　**[正解]** エ：②，オ：④，カ：①

[解説]

$x^2+1=u$ とおくと，$\boldsymbol{2xdx}=du$

$$\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot 2xdx$$

$$=\int\frac{1}{2\sqrt{u}}du \quad \text{[B]}$$

$$=\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2u^{\frac{1}{2}}+C \quad \text{[C]}$$

$$=\sqrt{u}+C$$

$$=\sqrt{x^2+1}+C$$

[B]　置換積分法②

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du$$

ただし，$g(x)=u$

[C]　$\alpha\neq-1$ のとき，

$$\int x^\alpha\,dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$$

3　[正解] キ：③

[解説]

$$\int \frac{e^x+1}{e^x+x}dx = \int \frac{(e^x+x)'}{e^x+x}dx \quad \text{[D]}$$

$$= \log|e^x+x|+C$$

[D]　$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \log|g(x)|+C$

4　[正解] ク：②

[解説]

$$\int \frac{dx}{\tan x} = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx \quad \text{[E]}$$

$$= \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}dx \quad \text{[F]}$$

$$= \log|\sin x|+C$$

[E]　$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

[F]　$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \log|g(x)|+C$